

Моделирование и визуализация седиментации в течении вязкой несжимаемой жидкости

В.А. Галкин^{1,А,В}, А.О. Дубовик^{2,А,В}, А.Д. Смородинов^{3,А,В}

^А Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут, Россия

^В Сургутский государственный университет, Сургут, Россия

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

³ ORCID: 0000-0002-9324-1844, sachenka_1998@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается уравнение гидродинамики с условием скольжения на границе и движение безынерционной не диффундирующей примеси в вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической области. Исследуются диффузионные процессы в дисперсных системах – эффект парашютирования падающей крупной частицы в среде, заполненной жидкостью. Представлен результат численно-аналитического решения системы уравнений, состоящих из уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и уравнения конвекции-диффузии. Показано, что для расчёта траектории движения частицы примеси требуется решить в трехмерном пространстве задачу Коши с заданными начальными условиями для каждой частицы примеси. Проведена серия вычислительных экспериментов по моделированию динамики тяжелой примеси в несжимаемой жидкости. Начальные условия для задачи Коши задаются на основе черно-белого изображения, где черный пиксель считается частицей примеси. Разработанное программное обеспечение протестировано для определения степени доверия проводимых расчётов путем решения исходной задачи в обратном порядке, для которой начальные условия для задачи Коши выбирались равными значению на последнем шаге исходной задачи. Представлен визуальный и количественный анализ полученных результатов на основе разработанного программного обеспечения с использованием библиотеки MathGL для языка программирования C++.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика, уравнение Навье-Стокса, седиментация, задача Коши, метод Рунге-Кутты.

Рассмотрим систему уравнений гидродинамики с условием скольжения на границе и движение безынерционной не диффундирующей примеси:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla, \vec{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla P = \varepsilon^2 \Delta \vec{V}, \\ \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ (\vec{V}, \vec{n})|_{\partial D} = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) N = -\operatorname{div} \frac{\vec{F}}{h}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Уравнения (1) исследуются в трехмерной области $D \subset \mathbb{R}^3 = \{\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)\}$, где $\vec{V}(\vec{X}, t)$ – поле скорости течения жидкости, которое подчиняется условию непротекания на границы области ∂D , и $P(x, t)$ – поле давления в той же трехмерной области, ε^2, ρ – константы, которые характеризуют вязкость и плотность жидкости, N – концентрация примеси в поле течения. \vec{F} – внешняя сила, действующая на частицы, h – коэффициент

сопротивления движению частицы. В дальнейшем в качестве внешней силы рассматривается сила тяжести.

$\vec{n}(\vec{X})$ – вектор нормали к поверхности ∂D в точке поверхности $x \in \partial D$.

В статье представлен результат численно-аналитического решения системы уравнений (1), состоящей из уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и уравнения конвекции-диффузии и является продолжением подходов и методов визуализации, разработанных в [1]. В рамках модели (1) исследуются диффузионные процессы в дисперсных системах, а именно – эффект парашютирования падающей крупной частицы в среде, заполненной жидкостью. Данный эффект является одной из причин коагуляции частиц [2]. Крупные частицы и окружающий их поток жидкости имеют идентичные физические параметры: вязкость, плотность, температуру, но отличаются размерами и, следовательно, имеют разную массу.

Задачи конвективной диффузии являются интенсивным полем исследования [3–7], однако, как правило, они рассматриваются в отрыве от уравнений, описывающих динамику поля течения, которое считается заданным [3–5]. В [5] рассматривается численно-аналитическое решение задачи миграции примесей в атмосфере и водной среде. В [6] рассматривается стационарная задача, состоящая из уравнения конвекции-диффузии и уравнения для поля течения с нелинейным коэффициентом реакции, а в работе [7] рассматривается исключительно численное решение с применением зарубежного программного обеспечения Ansys Fluent. В данной работе исследуется нестационарная задача конвекции-диффузии, описывающая динамику тяжелой примеси в поле течения несжимаемой жидкости, при этом используется найденный авторами класс точных решений уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и разработанное программное обеспечение для расчета и визуализации процесса осаждения примеси.

Согласно [8] поле $\vec{V}(\vec{X}, t)$, заданное формулой (2), и скалярное поле $P(\vec{X}, t)$ (3), являются решением системы уравнений Навье-Стокса для течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре:

$\Pi_k = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^3 : 0 < r(\vec{X}) < \rho_k \sqrt{2}, 0 < x_3 < 2\pi\sqrt{2}\}$, где $r(\vec{X}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\rho_k > 0, k \in \mathbb{N}$ – корни производной функции Бесселя первого рода нулевого порядка, упорядоченные по возрастанию.

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \vec{U}(\vec{X}) \exp(-\varepsilon^2 t), \quad (2)$$

$$P(\vec{X}, t) = -\frac{\bar{\rho}}{2} \vec{V}^2(\vec{X}, t) + \alpha(t), \quad (3)$$

$$\vec{U}(\vec{X}) = \frac{J'_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{r\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_2 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ -x_1 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} J_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где

J_0 – функция Бесселя 0-го порядка,

J'_0 – производная функции Бесселя 0-го порядка,

$\alpha(t)$ – произвольная функция времени t .

Сначала рассматривается уравнение (4) без учета действия внешней объемной силы. В таком случае вектор скорости движения примеси совпадает с вектором скорости движения жидкости \vec{V} . Следовательно, для расчёта траектории движения частицы примеси требуется решить в трехмерном пространстве задачу Коши с заданными начальными условиями для каждой частицы примеси.

В разработанном программном обеспечении для расчета и визуализации процесса осаждения примеси решается задача Коши, для этого используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности, который является классическим численным методом для ре-

шения данной задачи [9, 10]. Для построения визуализации применялась библиотека MathGL [11] для языка программирования C++, в качестве вычислительных станций для решения задачи использовалась ЭВМ на базе процессора AMD Ryzen Threadripper 2990Wx 32-Core Processor, с 32 Гб ОЗУ. Для раскрытия потенциала процессора и ускорения вычислений использовалась технология OpenMP [12] с распараллеливанием вычислений на 64-потоков.

Проведена серия вычислительных экспериментов по моделированию динамики тяжелой примеси в несжимаемой жидкости. Начальное положение примеси задается выражением

$$N_k(t = 0, \vec{X}) = (x_{1,k}^0, x_{2,k}^0, x_{3,k}^0).$$

Индекс k указывает на номер частицы примеси, для которой задается начальное положение. Начальное положение каждой частицы примеси определяется по следующему правилу:

1. Рассмотрим произвольное, бинарное (двухцветное) черно-белое изображение размером не более 300 пикселей на 300 пикселей, на котором белый цвет будет служить фоном и занимать от 50 % процентов изображения, черный цвет является контуром произвольного изображения, для примера рассмотрим рис. 1. Ограничение на размер изображения обусловлено возможностями вычислительной машины.

2. Обозначим размеры рисунка в пикселях за w, h – ширина и высота. Рассмотрим каждый пиксель изображения $P_{i,j}$, где P – значение пикселя (1 – белый, 0 – черный), а пара (i, j) – координаты пикселя в левой прямоугольной системе координат, началом которых является левый верхний угол изображения.

3. Если пиксель $P_{i,j}$ имеет значение 0 (т.е. является черным), то данный пиксель будет использован в качестве начального условия для задачи Коши после обработки по следующим формулам:

$$x_{1,k}^0 = \frac{i}{w*0.1} - Sq_0, x_{2,k}^0 = \frac{j}{h*0.1} - Sq_0,$$

где Sq_0 – размер области, в которой требуется разместить примесь (в рассматриваемой статье $Sq_0 = 5$).

Координата $x_{2,k}^0 = 0.1$ для каждой частицы примеси, её значение соответствует расположению частицы над поверхностью земли.

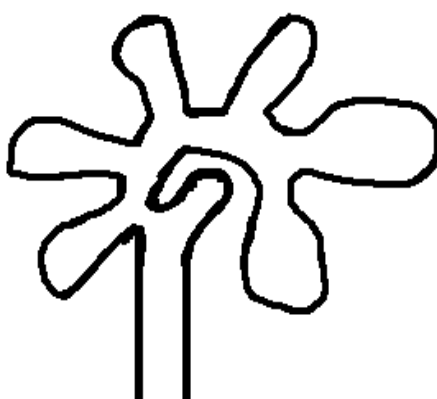


Рис. 1. Изображение, используемое для формирования начального поля примеси

Основные характеристики вычислительных экспериментов:

$t_{start} = 0; t_{end} = 400$; шаг по времени для алгоритма Рунги – Кутты: $dt = 10^{-5}$, шаг по времени для сохранения результатов $dt = 0.5$ (каждое 50000-е изображение сохранялось), коэффициент вязкости $\varepsilon^2 = 0.05^2$.

Результаты математического моделирования с указанными параметрами представлены на рис. 2.

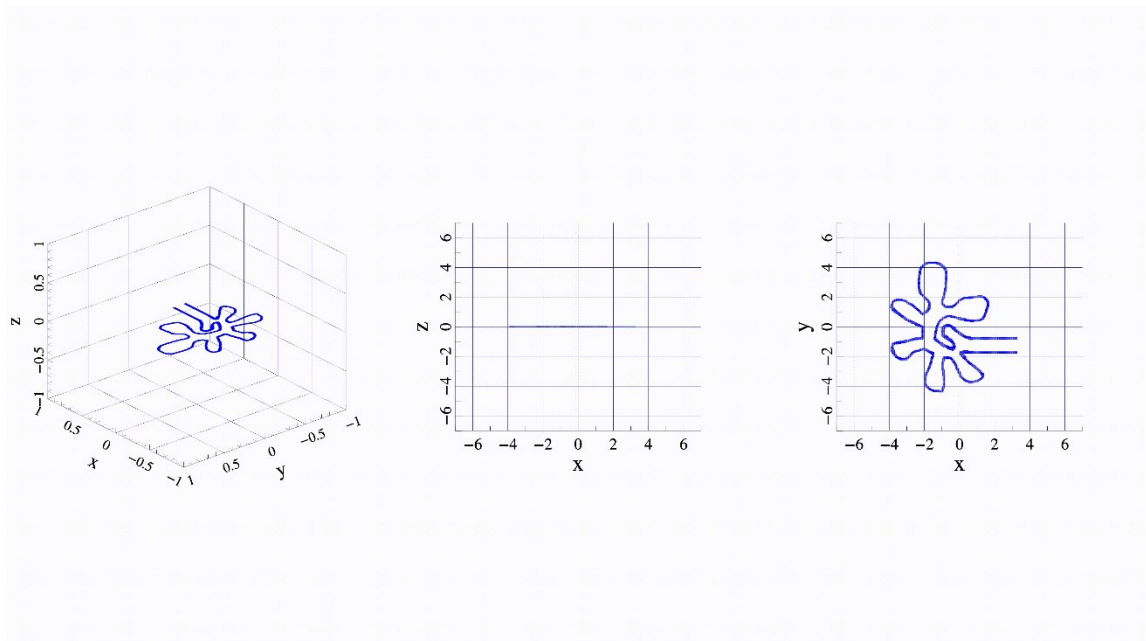


Рис. 2. Результаты математического моделирования для 1-го вычислительного эксперимента

Для тестирования программного обеспечения рассматривается обратная задача, рис. 3. При этом начальное положение поля примеси для задачи Коши совпадает с конечным положением поля примеси на последнем шаге по времени решения прямой задачи (рис. 2):

$$N_k^{(2)}(t = 0, \vec{X}) = N_k(t = t_{end}, \vec{X}).$$

Верхний индекс 2 при N указывает на тот факт, что это значения начального поля концентрации примеси для обратной задачи, без индекса – для прямой задачи. Шаг по времени составил $dt = -10^{-5}$.

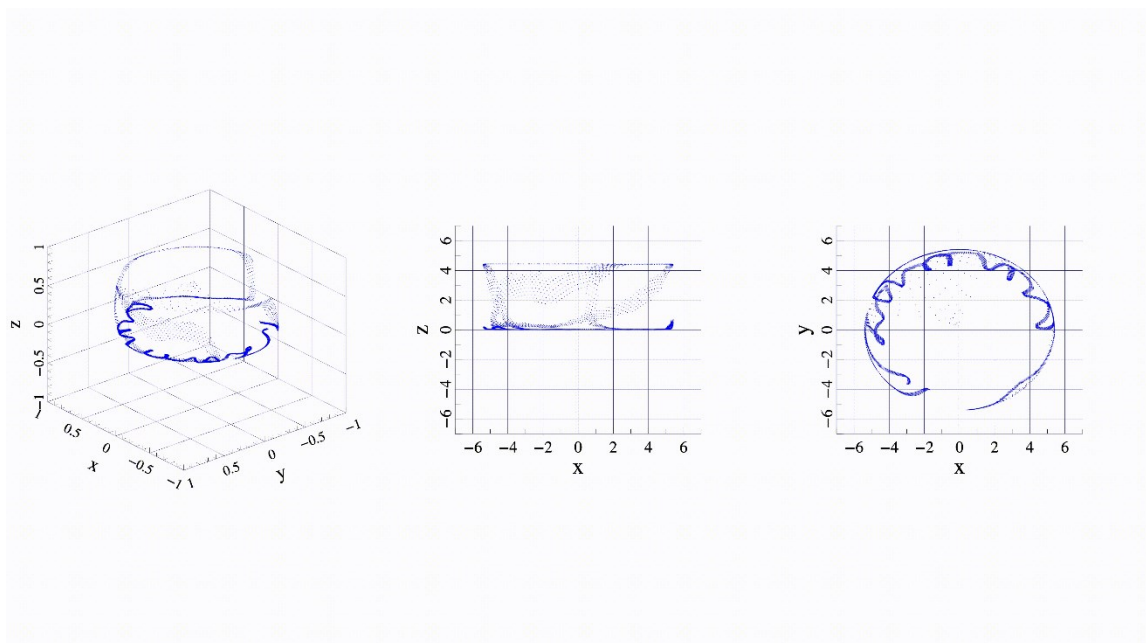


Рис. 3. Результат решения обратной задачи

Рис. 1 и рис. 3 на конечный момент времени качественно совпадают, что свидетельствует о высокой точности получаемого решения. Количественные показатели меры ошибки следующие:

максимальная и средняя ошибка по каждой из координат имеют значения:

$$x_{1_max} = 0.0919, x_{1_avg} = 0.045;$$

$$x_{2_max} = 0.0921, x_{2_avg} = 0.049;$$

$$x_{3_max} = 0.00117, x_{3_avg} = 0.0004.$$

При этом оценивалось расстояние между точками, сформированными изначально (рис. 1), и точками, полученными при решении обратной задачи (рис. 3). Максимальное расстояние составляет 0.0923, среднее значение – 0.074.

Относительно размеров рисунка погрешность расчётов составляет 0.9 и рассчитана следующим образом:

$$E_{otn} = \frac{\max error}{2 * S_{q_0}} * 100 = \frac{0.0923}{2 * 5} * 100 = 0.923$$

Рассматривая движение примеси в данном поле, можно предположить, что оно описывает движение восходящих потоков, и, возможно, геоглифы (рис. 4) на плато Наска древние наскийцы создавали, основываясь на данном эффекте.



Рис. 4. Пример геоглифа на плато Наска

Рис. 1, использовавшийся для определения начальных условий задачи Коши, был сформирован на основе рис. 4.

Рассмотрим систему (1) с учетом действия силы тяжести на примесь, растворенную в жидкости. Для усиления предположения проведем ещё один вычислительный эксперимент, для этого модифицируем поле (4) добавлением коэффициента, отвечающего за гравитационную составляющую, следующим образом:

$$U(x) = \frac{J'_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{r\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_2 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ -x_1 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} J_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix} - G\vec{k}.$$

В данном случае частицы, поднимаемые полем, с течением времени будут оседать в плоскости $z = 0$, и потому для алгоритма был добавлен критерий остановки, согласно которому, расчет прекращался, если на следующей итерации точка по оси z начнёт принимать отрицательные значения. После этого для всех последующих временных шагов значение для данной точки равнялось последнему корректному значению.

В ходе данного вычислительного эксперимента были изменены следующие значения:

$$t_{start} = 0, t_{end} = 600, dt = 0.001, dt_{save} = 4$$

Значение параметра $G = 0.0005$.

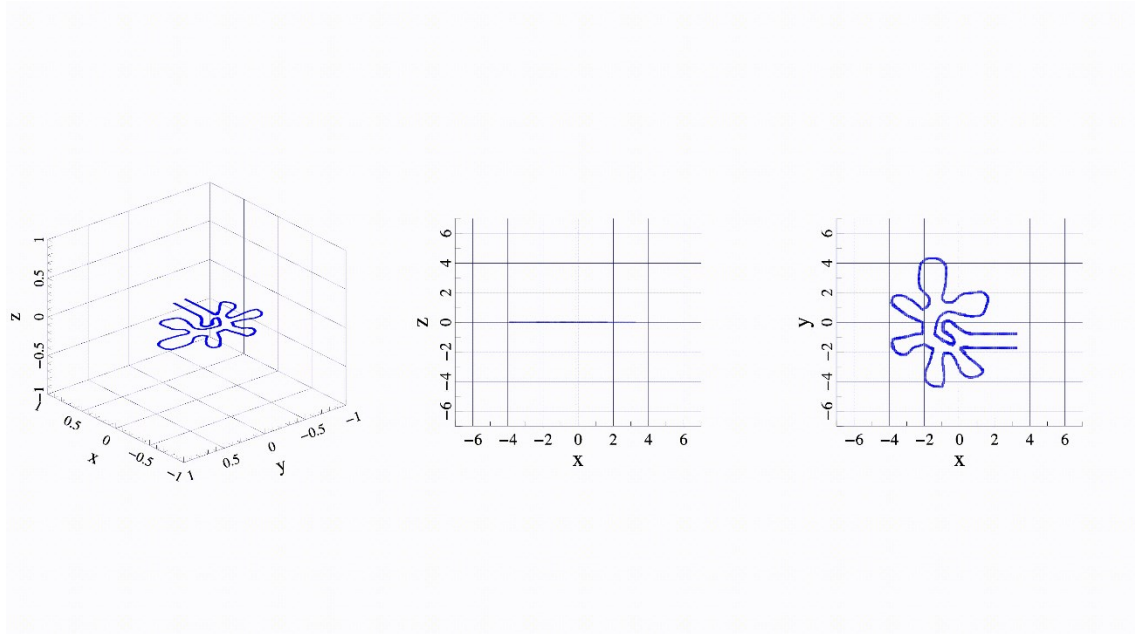


Рис. 5. Моделирование седиментации

Как видно из результатов математического моделирования, рис. 5, к конечному моменту времени $t = 600$ все частицы осели в плоскости $z = 0$.

Как можно видеть из результатов вычислительного эксперимента, на «поверхности земли» выпал осадок в виде некоторого геоглифа. В дальнейшем можно разработать алгоритм по подбору начальных условий таким образом, чтобы в ходе моделирования в плоскости $z = 0$ получался требуемое изображение. Для этого требуется сформировать начальные точки в плоскости $z = 0.1$, которые будут занимать всю площадь основания цилиндра. Далее проводится моделирование и, после выпадения примеси, необходимо выбрать только те точки, которые формируют требуемое изображение. Затем провести ещё один вычислительный эксперимент, для которого начальными точками будут только те, которые формируют изображение.

Кроме того, если смотреть в проекции zOx (рис. 5, средний), то можно увидеть, что частицы в воздухе также формируют некоторые произвольные рисунки. С применением аналогичного алгоритма, только выбор точек будет происходить не относительно изображения, получаемого в проекции $z=0$, а относительно изображения в проекции zOx . В итоге можно получить инструмент для формирования различных воздушных иллюзий/проекций в воздухе.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Список литературы

1. V. A. Galkin, A.O. Dubovik, D.A. Morgun. Visualization of Flow of a Viscous Incompressible Fluid Corresponding to Exact Solutions of the Navier-Stokes Equations (2024). Scientific Visualization 16.1: 52 - 63, DOI: 10.26583/sv.16.1.05
2. Волощук В.М., Седунов Ю.С., Процессы коагуляции в дисперсных системах. Ленинград: Гидрометеиздат. 1975. 320 с.
3. Сыромятников П. В., Кривошеева М.А., Лапина О.Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю.Г. Моделирование нестационарных процессов диффузии – конвекции – реакции в

многослойном полупространстве и сцепленных полупространствах // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2020. Т. 17. №1. Ч. 1. С. 30–41.

4. Вабищевич П. Н. Монотонные схемы для задач конвекции-диффузии с конвективным переносом в различной форме // ЖВМ и МФ. 2021. Т. 61. № 1. С. 95–107.

5. Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю.Г., Павлова А. В. // Моделирование процесса диффузии – конвекции загрязняющей примеси от периодического источника. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 1. С. 25–34.

6. Saritskaia Zh.Yu., Brizitskii R. V. Boundary control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model // Far Eastern Mathematical Journal. 2023. V. 23. No 1. P. 106–111.

7. Алдалло М., Поникаров С. И., Поникаров А. С. Моделирование турбулентной динамики и фазовых переходов в потоке смеси из двух компонентов в трубе круглого сечения // Вестник технологического университета. 2024. Т.27, №1

8. В.А. Галкин, А.О. Дубовик Об одном классе точных решений системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 8. С. 3-13.

9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М . Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 630 с. — ISBN 5-93208-043-4. — С. 363–375.

10. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 592 с.

11. MathGL. Режим доступа: <https://mathgl.sourceforge.net/>.

12. OpenMP. Режим доступа: <https://web.archive.org/web/20080720100837/http://www.openmp.org/>

Modeling and Visualization of Sedimentation in a Viscous Incompressible Fluid

V. A. Galkin^{1,A,B}, A.O. Dubovik^{2,A,B}, A.D. Smorodinov^{3,A,B}

^A Surgut branch of SRISA, Surgut, Russia

^B Surgut State University, Surgut, Russia

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

³ ORCID: 0000-0002-9324-1844, sachenka_1998@mail.ru

Abstract

The article considers the equation of hydrodynamics with a sliding condition at the boundary and the motion of an inertialess non-diffusing impurity in a viscous incompressible liquid in a cylindrical region. Diffusion processes in dispersed systems are investigated – the effect of parachuting a falling large particle in a liquid-filled medium. The result of a numerical and analytical solution of a system of equations consisting of the Navier-Stokes equation for an incompressible fluid and the convection-diffusion equation is presented. It is shown that in order to calculate the trajectory of an impurity particle, it is necessary to solve the Cauchy problem in three-dimensional space with given initial conditions for each impurity particle. A series of computational experiments has been carried out to simulate the dynamics of a heavy impurity in an incompressible liquid. The initial conditions for the Cauchy problem are set based on a black-and-white image, where a black pixel is considered an impurity particle. The developed software has been tested to determine the degree of confidence in the calculations performed by solving the initial problem in reverse order, for which the initial conditions for the Cauchy problem were chosen equal to the value at the last step of the initial problem. A visual and quantitative analysis of the results obtained is presented based on the developed software package using the MathGL library for the C++ programming language.

Keywords: mathematical modeling, hydrodynamics, Navier-Stokes equation, sedimentation, Cauchy problem, Runge-Kutta method.

References

1. V. A. Galkin, A.O. Dubovik, D.A. Morgun. Visualization of Flow of a Viscous Incompressible Fluid Corresponding to Exact Solutions of the Navier-Stokes Equations (2024). Scientific Visualization 16.1: 52 - 63, DOI: [10.26583/sv.16.1.05](https://doi.org/10.26583/sv.16.1.05)
2. Voloshchuk V.M., Sedunov Yu.S., Coagulation processes in dispersed systems. Leningrad: Gidroieteroizdat. 1975. 320 p.
3. Syromyatnikov P. V., Krivosheeva M.A., Lapina O.N., Nesterenko A. G., Nikitin Yu.G. Modeling of nonstationary diffusion-convection-reaction processes in a multilayer half-space and coupled half-spaces // Ecological Bulletin of the Scientific centers of the BSEC. 2020. Vol. 17. No.1. Part 1. C. 30-41.
4. Vabishevich P. N. Monotonic schemes for convection-diffusion problems with convective transfer in various forms // ZHVM and MF. 2021. Vol. 61. No. 1. pp. 95-107.
5. Lapina O. N., Nesterenko A. G., Nikitin Yu.G., Pavlova A.V. // Modeling of the diffusion – convection process of a contaminant from a periodic source. Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2022. Vol. 19. No. 1. pp. 25-34.

6. Saritskaia Zh.Yu., Brizitskii R. V. Boundary control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model // Far Eastern Mathematical Journal. 2023. V. 23. No 1. P. 106–111.
7. Aldallo M., Ponikarov S. I., Ponikarov A. S. Modeling of turbulent dynamics and phase transitions in the flow of a mixture of two components in a circular pipe // Bulletin of the Technological University. 2024. Vol.27, No.1
8. V.A. Galkin, A.O. Dubovik On a class of exact solutions of the system of Navier-Stokes equations for an incompressible fluid // Mathematical modeling. 2023. Vol. 35, No. 8. pp. 3-13.
9. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods. — M.: Laboratory of Basic Knowledge, 2001. — 630 p. — ISBN 5-93208-043-4. — pp. 363-375.
10. Kalitkin N. N. Numerical methods. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2011. 592 p.
11. MathGL. Access mode: <https://mathgl.sourceforge.net/>.
12. OpenMP. Access mode: <https://web.archive.org/web/20080720100837/http://www.openmp.org/>